ALGUNAS TÉCNICAS PARA ENSEÑAR A RESOLVER PROBLEMAS VERBALES CON ECUACIONES. PROBLEMAS NUMÉRICOS SIMPLES.

Fortino Escareño Soberanes:
Profesor e investigador del Colegio de Profesores de Educación Secundaria A.C. "Moises Sáenz".

Entre las dificultades metodológicas que enfrentamos los profesores de matemáticas de educación secundaria, destaca la de cómo ayudar a los alumnos a escribir ecuaciones adecuadas para resolver problemas verbales.

Para resolverla, algunos profesores recurren a la práctica que consiste en redactar los problemas utilizando las llamadas "palabras clave", de manera que el orden en que éstas aparecen en el enunciado verbal del problema sugiere los símbolos que se han de escribir para hallar la ecuación que corresponde.

Un ejemplo típico de esta práctica común se ilustra en el siguiente problema:

Tres camisas y dos pantalones cuestan $500, y dos camisas y tres pantalones cuestan $600. ¿Cuál es el costo de cada prenda?.

Al asociar un símbolo con cada término del enunciado verbal, obtenemos un sistema de ecuaciones que resuelve el problema:

Tres camisas y dos pantalones cuestan $500

$$3\ c + 2\ p = 500$$

Dos camisas y tres pantalones cuestan $600

$$2\ c + 3\ p\ 600$$

Aunque el sistema de ecuaciones que se obtiene de esta manera nos permite resolver el problema, con mucha frecuencia esta práctica conduce a los alumnos a escribir ecuaciones inadecuadas para otros problemas verbales. Esto sucede porque, al utilizar el lenguaje algebraico como si fuera un lenguaje taquigráfico, se incurre en el error de considerar las letras como representantes de objetos. En el problema anterior, la c representa al objeto camisa, la p, al objeto pantalón.

Pero, en álgebra, las letras representan números. En este caso, la c representa el precio de una camisa, y la p, el precio de un pantalón.

Veamos un problema verbal en donde esta práctica conduce a una representación errónea:

> Una milla terrestre equivale a 8 furlongs. Una milla terrestre y un furlong equivalen a 18 10 m. ¿Cuánto mide una milla terrestre y cuánto mide un furlong?

El lenguaje taquigráfico nos conduce a un sistema de ecuaciones que no corresponde a la situación que se está planteando:

> Una milla terrestre equivale a 8 furlongs
> m = 8 f
> m + f = 1 810 m.
> Una milla terrestre y un furlong equivalen a 18 10 m.

La investigación a este respecto dice que, si bien esta forma de resolver problemas sirve para problemas típicos de ciertos libros de texto, su potencia es muy limitada, ya que los estudiantes que la usan son menos competentes para advertir las contradicciones involucradas en los enunciados de los problemas.

Punto de arranque de nuestra propuesta.

Generalmente, cuando se intenta enseñar a resolver problemas verbales mediante ecuaciones de primer grado, se parte de problemas ya formulados cuya solución se desconoce. Lo que aquí proponemos es una secuencia didáctica que invierte este proceso: que el alumno aprenda a simbolizar a partir de una situación numérica conocida.

Como maestros, debemos proponernos que nuestros alumnos logren concebir el álgebra como una valiosa herramienta que sirve para resolver problemas. Para alcanzar este propósito en la clase, pondremos a prueba una y otra vez el álgebra hasta que los alumnos empiecen a manifestar confianza en ella. Normalmente son suficientes dos situaciones como las que presentaremos en la siguiente secuencia didáctica.

Primera situación.

1. Tenemos tres números cuya suma es 65. Estos números son:

    9 29 27 65

2. Supondremos que ignoramos de qué número se trata, pero que sí conocemos las relaciones que existen entre ellos: el tercero es el triple del primero; el segundo es 2 unidades mayor que el tercero, y la suma de los tres es 65, ¿Podríamos hallar estos números usando el álgebra? Veamos: si asignamos la x al primero, el tercero será 3x y el segundo será 2 unidades mayor que 3x, es decir, 3x + 2:

9 29 27 65
X 3x + 2 3x 65

El hecho de que la suma sea 65, nos permite establecer la siguiente ecuación:

$$x + 3x + 2 + 3x = 65$$

Si, como dijimos antes, lo que pretendemos es lograr que nuestros alumnos lleguen a concebir el álgebra como una herramienta que les permita resolver problemas, para que ésta empiece a "inspirarles confianza", la solución de esta ecuación debe ser 9:

$$x + 3x + 2 + 3x = 65$$
$$7x+2 = 65$$
$$7x = 63$$
$$X = 9$$

Interpretemos esta solución: el primer número es 9; el tercero, que es el triple de éste, es 27, y el segundo es 2 unidades mayor que 27, o sea 29. Con esto, el álgebra nos ha conducido a los resultados que ya conocíamos.

La sometemos a prueba nuevamente. Si ahora asignamos la x al tercer número, el primero será x/3, y el segundo, x + 2:

9 29 27 65
X 3x + 2 3x 65
x/3 x + 2 X 65

Como la suma sigue siendo 65, podemos establecer una nueva ecuación:

$$x/ 3 + x + 2 + x = 65$$

cuya solución debe ser 27. Comprobémoslo:

$$x + 3x + 6 + 3x = 195$$
$$7x + 6 = 195$$
$$7x = 189 \quad x = 27$$

Si interpretamos esta solución veremos que, nuevamente, el primer número será 9, el segundo, 29, y el tercero, 27.

Pero sometámosla a prueba otra vez: asignemos la x al segundo número; el tercero será x - 2, y el primero, (x - 2) / 3:

9 29 27 65
9 29 27 65
x / 3 x + 2 x 65
(x - 2)/3 x x - 2 65

Como la suma sigue siendo 65, la ecuación ahora es:

(x- 2)/ 3 + x + x- 2 = 65

cuya solución, como se esperaba, es 29. Al interpretar la solución, vemos que éste es el segundo número; por tanto, el terce~ ro será 27, y el primero, 9.

En este momento podemos preguntar a nuestros alumnos: "¿Confían ya en el álgebra?. "¿No ha sido suficiente con las pruebas que ha pasado?. "(?Quieren más pruebas de fidelidad?". Pues continuemos con ellas. Hasta ahora hemos considerado únicamente relaciones multiplicativas entre los datos del problema; consideremos ahora sólo relaciones aditivas: si el primer número es x, el segundo será x + 2, y el tercero, x + 18:

9 29 27 65
x x + 20 x + 18 65
Ahora la ecuación es:
x+x+20+x+18=65

cuya solución debe ser 9. La interpretación de esta solución nos conduce fácilmente a los resultados previstos..

Una prueba más: ahora asignamos la x al segundo número. Entonces, el primero será x - 20, y el tercero, x - 2:

9 29 27 65
x X+20 x+ 18 65
X-20 x x - 2 65
La ecuación será: x - 20 + x + x - 2 = 65
cuya solución es 29.

Una última prueba: si asignamos la x al tercer número, debemos asignar x + 2 al segundo NI x -18 al primero. Ahora la ecuación seria:

$x - 18 + x + 2 + x = 65$
cuya solución es 27.

3. Hagamos un alto para indicar algunas ventajas que nos brinda esta técnica.

- Las letras representan números. Esto permite evitar los errores que se señalaron al principio de este trabajo.

- La ecuación es una herramienta para resolver el problema y no la solución del problema. Muchos alumnos creen que con plantear y resolver la ecuación, han resulto el problema. Cada una de las pruebas a que sometimos el álgebra nos permitió interpretar la solución de la ecuación como el valor de uno de los números involucrados y encontrar los otros dos números.

- La técnica, por su carácter dinámico, ofrece muchas oportunidades para la simbolización. Hemos simbolizado la situación de seis formas distintas, pero hay muchas más.

- Al asignar la incógnita a números distintos, el alumno tiene la posibilidad de entender de qué modo se simbolizan las relaciones que se invierten. En la situación que hemos considerado, por ejemplo, si el segundo número es 2 unidades mayor que el tercero, entonces, el tercero será dos unidades menor que el segundo.

- Promueve el desarrollo de una habilidad muy importante: la flexibilidad del pensamiento. Si cada vez que planteamos un problema dijéramos al alumno la forma de resolverlo, estaríamos promoviendo la rigidez del pensamiento; con la técnica que estamos utilizando, se trata de discutir en clase diversas formas de resolverlo, con lo que estamos promoviendo la flexibilidad del pensamiento.

4. Hasta ahora hemos utilizado la técnica para resolver sólo problemas numéricos. Nos faltaría considerar problemas que aludan a contextos específicos. Con esto no se agregaría ninguna dificultad. La misma situación que estamos examinando nos puede servir para ese propósito: los números y sus relaciones pueden referirse a contextos de edades, dinero, objetos, etc. Por ejemplo:

Un padre de familia compró 65 canicas. El número de canicas que dio al hijo menor es un tercio de lo que le dio al mediano. El mayor recibió dos canicas más que el mediano. ¿Cuántas canicas recibió cada uno de los hijos?

Segunda situación.

1. La situación problemática que examinamos anteriormente condujo a ecuaciones que contienen la incógnita sólo en el primer miembro. Si quisiéramos extender la técnica a ecuaciones que contienen la incógnita en ambos miembros, podríamos partir de una situación numérica como la siguiente:

8	6	9	1	24
24/3	24/4	9	1	24

Luis tiene una bolsa de canicas. Un tercio de ellas son azules y un cuarto son rojas. Si además tiene 9 canicas verdes y una blanca, ¿cuántas canicas tiene en total?

Si asignamos la x al total, el número de canicas de cada color se representaría de la siguiente manera:

8	6	9	1	24
x / 3	xl4	9	1	x

Y la ecuación sería:

x1 3 + x1 4 + 9 + 1 = x

2. El uso de esta técnica permite que el profesor proponga tareas que ofrezcan mayores posibilidades de que el alumno se acerque más al álgebra. Algunas de ellas son las siguientes:

Dados los siguientes tres números:
8 11 16 35

O Plantear varias situaciones que representen esta situación.

Por ejemplo: (x) + (x + 3) + (2x) = 35
O bien: (x / 2) + (x - 5) + (x) = 35

O Redactar un problema para cada una de las ecuaciones del punto anterior.

Por ejemplo: "Alicia tiene tres hijos. El mayor tiene el doble de la edad del menor y el mediano es 3 años mayor que el menor. Si la suma de sus edades es 35, ¿qué edad tiene cada uno?"

0 Plantear varias ecuaciones, referidas a esta misma situación, que tengan la misma solución.

Por ejemplo: (x) + (2x - 5) + (2x) = 35
y, (x) + (x + 3) + (x + 8) = 35

- Redactar los problemas respectivos.

- Redactar un problema con contexto (aquí lo que cuenta es el humor y la creatividad).

Extensiones de esta técnica.

El esquema que hemos utilizado en las dos situaciones anteriores para simbolizar las relaciones que se pueden establecer entre los datos numéricos, puede extenderse a otras situaciones como las que se indican en seguida:

Situaciones de porcentaje.

Un ejemplo: "Pagué S460 por un reloj. Si ese precio incluye el 15% del IVA, ¿cuál es el precio original del reloj?"

Esta situación se puede representar mediante el siguiente esquema:

Cantidad base 15% de esa cantidad Total

X .15x 460

Y la ecuación que la representa es:

x + .15%x = 460

Si sólo conocemos el importe del 1VA tendríamos:

Cantidad base 15 % de esa cantidad Total

X 60 x + .15x

La ecuación correspondiente sería:

x + 60 = x + .15x

Éstos son dos problemas típicos cuya solución no parece sencilla para quienes no manejan con confianza el álgebra.

Situaciones sobre edades.

Utilizaremos ahora un esquema similar para plantear problemas sobre edades.

Un ejemplo: "Las edades de dos niños suman 16 años, y dentro de un año la edad de uno será el doble de la edad del otro. ¿Cuáles son las edades?".

	Antes	Hoy	Después
Niño mayor		X	X + 1
Niño menor		16 - x	16-x+ 1

Ecuación: x + 1 = 2 (16 - x + 1)

Otro ejemplo: "Un padre tiene 41 años, y su hijo 14. ¿Cuántos años hace que el padre tenía cuatro veces la edad de su hijo?

	Antes	hoy	Después
Padre	41 - x	41	
Hijo	14 - x	14	

Ecuación: 41 - x = 4 (14 - x)

Un último ejemplo: "Juan le dijo a Pedro: "Cuando transcurra la mitad de los años que yo tengo, tú tendrás el doble de mi edad actual. 'Sí -contestó Pedro-, pero hace 15 años mi edad era cuatro veces mayor que la tuya'. Calcula la edad actual de Juan".

	Antes	Hoy	Después		
Juan	x - 15	x	X + X/2		
Pedro		2x -x/2 - 15		2x -x/2	2x

Ecuación: $4(x - 15) = 2x - x / 2-15$